Apellido: .... Nombre: .... Curso: ....

1er Parcial de **MATEMATICA SUPERIOR**

11 de mayo de 2015

TEMA: **47 C**

1	2			3			4	Nota Final
2 p.	1 p.	1 p.	1.5 p.	1 p.	1.5 p.	2 p.	2 p.	

LA NOTA ES N = X – 2 SIENDO X LA SUMA DE PUNTOS. TIEMPO: 90 MINUTOS

Ejercicio n° 1

Resuelva en C (complejos) la ecuación: $z^2 + z + 6 = j\,(z - 2)$

Ejercicio n° 2:

Indique la respuesta correcta y justifique:

2.1) El desarrollo en Serie Trigonométrica de Fourier de $f(t)=\begin{cases} t+1 & t\in(-1\,;3) \\ 7-t & t\in(3\,;7) \end{cases}$ $\wedge$ $f(t)=f(t+8)$ es:

a) sin senos b) sin cosenos c) solo frecuencias impares d) solo frecuencias pares

2.2) El valor medio de la función anterior es: a) 1 b) 1.5 c) 2 d) 3.5

2.3) El valor de la integral: $\int_0^\infty t\cos(2t)\, e^{-6t}\, dt$ calculada por Transformada de Laplace es:

a) 0 b) 1/50 c) 1/9600 d) infinito e) otro valor

Ejercicio n° 3:

Dada $G(s) = \dfrac{h(s^2 - ks + 5)}{(s^2 - 1)(s^2 + 8s + 20)}$ la transferencia de un sistema.

a) Halle $k \in R$ tal que el sistema sea estable. Justifique.

b) Con el valor hallado de k, calcule $h \in R^+$ tal que $|\,G(2+2j)\,| = 1/\sqrt{13}$

c) Con el k hallado en a) y h = 13, halle la respuesta y(t) del sistema a la entrada: $x(t) = e^{5t}$

Ejercicio n° 4:

Resuelva utilizando transformada Z:

$$x(n+2) - 10\,x(n+1) + 25\,x(n) = 4^n \qquad \text{con } x(0)=1 \;\wedge\; x(1)=-6$$

RESPUESTAS PARCIAL 1 TEMA 47 C

Ejercicio 1: Las raíces son: $-2j$ y $-1 + 3j$

Ejercicio 2:

2.1) solo frecuencias impares por ser suma de una f periódica alternada + cte.

2.2) El valor medio es 2

2.3) $F(s) = \dfrac{s^2 - 4}{(s^2+4)^2}$ entonces $F(6) = 1/50$

Ejercicio 3: $G(s) = \dfrac{h(s^2 - ks + 5)}{(s^2-1)(s^2+8s+20)}$

a) Para que el sistema sea estable, 1 no debe ser polo entonces debe anularse en 1 el numerador:

$1^2 - 1\,k + 5 = 0$ entonces $k = 6$

b) $G(s) = \dfrac{h(s-1)(s-5)}{(s-1)(s+1)(s^2+8s+20)} = \dfrac{h(s-5)}{(s+1)(s^2+8s+20)}$

Los polos son: -1, $-4 + 2j$ y $-4 - 2j$ y los ceros son: 5 e infinito

$|\,G(2+2j)\,| = \dfrac{h\sqrt{13}}{6\sqrt{13}\sqrt{52}} = \dfrac{h}{6\,2\sqrt{13}} = 1/\sqrt{13}$ entonces: $h = 12$

c) Como $x(t) = e^{5t}$ entonces $X(s) = \dfrac{1}{s-5}$

Recordemos que la salida Y(s) es: $Y(s) = G(s) \cdot X(s)$

Entonces: $Y(s) = \dfrac{h(s-5)}{(s+1)(s^2+8s+20)} \cdot \dfrac{1}{s-5} = \dfrac{h}{(s+1)(s^2+8s+20)}$

Descomponemos en fracciones simples:

$Y(s) = \dfrac{A}{s+1} + \dfrac{B\,s + C}{s^2+8s+20} = \dfrac{A(s^2+8s+20) + Bs(s+1) + C(s+1)}{(s+1)(s^2+8s+20)}$

Igualando los numeradores: $A(s^2+8s+20) + B(s^2+s) + C(s+1) = 13$

Por lo tanto: $A + B = 0 \;\wedge\; 8A + B + C = 0 \;\wedge\; 20A + C = 13$

Como el valor de A es: $13/13 = 1 \Rightarrow B = -1 \;\wedge\; C = -7$

Volviendo a Y(s): $Y(s) = 1 \cdot \dfrac{1}{s+1} - 1\,\dfrac{s}{(s+4)+4} - 7\,\dfrac{1}{(s+4)+4}$

O bien: $Y(s) = \dfrac{1}{s+1} - \dfrac{s+4}{(s+4)+4} + (-7+4)/2\,\dfrac{2}{(s+4)+4}$

Antitransformando: $y(t) = e^{-t} - \cos(2t)\,e^{-4t} - 3/2\,\text{sen}(2t)\,e^{-4t}$

Ejercicio 4:

$X(z) = (z^3 - 20z^2 + 65z) / (z-4)(z-5)^2$ Antitransformo: $x(n) = 4^n - 2\,n\,5^n$

Mat. Sup 1º parcial

tema 47e

11-5-15

Ej 1

Resuelva en C (complejos) la ecuación: $z^2+z+6 = j(z-2)$

$z^2+z+6-j(z-2)=0 \rightarrow z^2+z+6-jz+2j=0$

$z^2+(1-j)z+(6+2j)=0 \rightarrow a=1, \quad b=1-j \quad c=6+2j$

$z_{1,2} = \frac{-b \pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(1-j) \pm\sqrt{(1-j)^2-4(6+2j)}}{2} = \frac{-(1-j) \pm\sqrt{\cancel{1}-2j-\cancel{1}-24-8j}}{2} =$

$= \frac{-(1-j) \pm\sqrt{-24-10j}}{2} = \frac{-(1-j)+w_{1,2}}{2}$

• $w^2 = -24-10j \rightarrow \left.\begin{matrix}|w|=26\\ x=-24\end{matrix}\right\} \quad w_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{|w|+x}{2}} \mp \sqrt{\frac{|w|-x}{2}}\,j =$

$= \pm\sqrt{\frac{26-24}{2}} \mp \sqrt{\frac{26+24}{2}}\,j \rightarrow w_1 = 1-5j, \quad w_2 = -1+5j$

$\rightarrow z_1 = \frac{-(1-j)+w_1}{2} = \frac{\cancel{-1}+j+\cancel{1}-5j}{2} = \frac{-4j}{2} = \boxed{-2j = z_1}$ ✓

$z_2 = \frac{-(1-j)+w_2}{2} = \frac{-1+j-1+5j}{2} = \frac{-2+6j}{2} = \boxed{-1+3j = z_2}$

Ej 2

Indique la respuesta correcta y justifique:

2.1) El desarrollo en Serie trigonométrica de Fourier de $f(t) = \begin{cases} t+1 & t\in(-1,3) \\ 7-t & t\in(3,7)\end{cases}$, $f(t)=f(t+8)$ es:

a) sin senos   b) sin cosenos   c) solo frecuencias imp.   d) solo frec. pares

tiene senos y cosenos

2.2) El valor medio de la función anterior es: a) 1   b) 1,5   c) 2   d) 3,5

2.3) El valor de la integral $\int_0^\infty t\cos(2t)\,e^{-6t}\,dt$ calculada por transformada de Laplace es:

a) 0   b) 1/50   c) 1/9600   d) infinito   e) otro valor

$F(s) = \int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,dt \xrightarrow{f(t)=t\cos(2t)} F(6) = \int_0^\infty \underbrace{t\cos(2t)}_{f(t)}\, e^{-6t}\,dt \quad s=6$

$f(t) \rightarrow F(s) = (-1)^1 \cdot G'(s) = \frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}$

Hallo $F(s)$ y evalúo en $s=6$:

$g(t) = \cos(2t) \rightarrow G(s) = \frac{s}{s^2+4} \rightarrow G'(s) = \frac{(s^2+4)-s\cdot 2s}{(s^2+4)^2} = \boxed{\frac{-s^2+4}{(s^2+4)^2}} = G'(s)$

$F(s) = \int_0^\infty t\cos(2t)\,e^{-st}\,dt = \frac{s^2-4}{(s^2+4)^2} \rightarrow F(6) = \frac{1}{50}$

EJ 3

Dada $G(s) = \dfrac{h\,(s^2 - ks + 5)}{(s^2-1)(s^2+8s+20)}$ la transferencia de un sistema.

a) Halle $k \in \mathbb{R}$ tal que el sistema sea estable. Justifique

$$G(s) = \frac{h\,(s^2 - ks + 5)}{(s+1)(s-1)\left[(s+4)^2+4\right]}$$

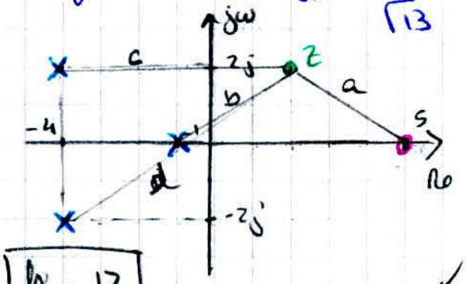
→ para que el sist. sea estable, no tiene que tener polos > 0 → necesito una raiz del numerador que anule la raiz = 1 del denominador

$$\to (s^2 - ks + 5) = (s-1)(s-a) = s^2 - as - s + a = s^2 - (a+1)s + a = s^2 - k + 5 \to a = 5$$

$$k = a+1 \xrightarrow{a=5} \boxed{k=6}$$

b) Con el valor de k hallado, calcule $h \in \mathbb{R}^+$ tal que $|G(\underbrace{2+2j}_{z})| = \frac{1}{\sqrt{13}}$

$$G(s) = \frac{h\,\cancel{(s-1)}(s-5)}{(s+1)\cancel{(s-1)}\left[(s+4)^2+4\right]} = \frac{h\,(s-5)}{(s+1)\left[(s+4)^2+4\right]}$$



Ceros: $5\,;\ \infty$
polos: $-1\,;\ -4 \pm 2j$

$$|G(2+2j)| = \frac{h \cdot a}{b \cdot c \cdot d} = \frac{1}{\sqrt{13}}$$

$$|G(2+2j)| = \frac{h \cdot \sqrt{13}}{\sqrt{13} \cdot 6 \cdot 2\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{13}} \to h = \frac{12\sqrt{13}}{\sqrt{13}} \to \boxed{h = 12}$$

c) Con el k hallado en a) y h = 13, halle la respuesta y(t) del sistema a la entrada: $x(t) = e^{5t}$ → $X(s) = \dfrac{1}{(s-5)}$

$$Y(s) = G(s)\,X(s) = \frac{13\,\cancel{(s-1)}\cancel{(s-5)}}{(s+1)\cancel{(s-1)}(s^2+8s+20)} \cdot \frac{1}{\cancel{(s-5)}}$$

$$Y(s) = \frac{13}{(s+1)(s^2+8s+20)} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+8s+20} = \frac{A(s^2+8s+20) + B(s^2+s) + C(s+1)}{(s+1)(s^2+8s+20)}$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 8A + B + C = 0 \\ 20A + C = 13 \end{cases} \to \begin{matrix} A = 1 \\ B = -1 \\ C = -7 \end{matrix} \to Y(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{-s-7}{(s+4)^2+4} = \frac{1}{s+1} + \frac{\overbrace{-s-4}^{-(s+4)}}{(s+4)^2+4} + \frac{-3}{(s+4)^2+4}\cdot\frac{2}{2}$$

$$\boxed{y(t) = e^{-t} - \cos(2t)\,e^{-4t} - \frac{3}{2}\,\text{sen}(2t)\,e^{-4t}}$$

EJ 4 Resuelva utilizando transformada Z: $x(n+2) - 10x(n+1) + 25x(n) = 4^n$

$x(0) = 1$
$x(1) = -6$

$$z^2\left[X(z) - x(0) - \frac{x(1)}{z}\right] - 10z\left[X(z) - x(0)\right] + 25X(z) = \frac{z}{z-4}$$

$$z^2X(z) - z^2 + 6z - 10zX(z) + 10z + 25X(z) = \frac{z}{z-4}$$

$$X(z)\underbrace{(z^2 - 10z + 25)}_{(z-5)^2} = \frac{z}{z-4} + z^2 - 16z = \frac{z + z^3 - 4z^2 - 16z^2 + 64z}{(z-4)} = \frac{z^3 - 20z^2 + 65z}{z-4}$$

HOJA Nº tema 47c

FECHA 11-5-15

$$X(z) = z\left[\frac{z^2-20z+65}{(z-4)\,(z-5)^2}\right] = z\left[\frac{A}{z-4}+\frac{B}{z-5}+\frac{C}{(z-5)^2}\right]$$

$$\rightsquigarrow\ A\,(z^2-10z+25)+B\,(z^2-9z+20)+C\,(z-4) = z^2-20z+65$$

$$\begin{cases} A+B = 1 \\ -10A-9B+C = -20 \\ 25A+20B-4C = 65 \end{cases} \to \begin{matrix} A=1 \\ B=0 \\ C=-10 \end{matrix} \to X(z) = \frac{z}{z-4} - \frac{10z}{(z-5)^2}$$

$$\boxed{x(n) = 4^n - 2n5^n}\ \checkmark$$

NOTA